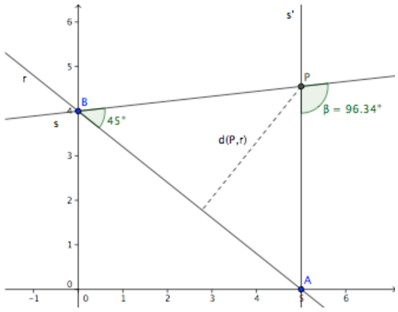
Nota

Prueba 3.01 - 1º Bach C
Geometría analítica

Nombre:... 21/05/10

Valor	Nota
25	

1. a) Hallar la ecuación de la recta *r* que pasa por los puntos A(5, 0) y B(0, 4).
   b) Hallar la ecuación de la recta *s*, que pasa por el punto B y forma con la recta *r* un ángulo de 45º (medido de *r* a *s*).
   c) Hallar el punto P donde se cortan la recta *s* con la recta *s′*, que es perpendicular al eje OX en el punto A.
   d) Hallar el ángulo que forman las rectas *s* y *s′*.
   e) ¿A qué distancia está el punto P de la recta *r*?



a) El vector de dirección de r es: $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=(-5,4)$, Luego la ecuación de la recta r es: $r:\dfrac{x-5}{-5}=\dfrac{y-0}{4}\Rightarrow \boxed{r:4x+5y-20=0}\Rightarrow m_r=-\dfrac{4}{5}$

b) Cómo el ángulo entre r y s debe ser 45º,

$$\tan 45^o=\frac{m_s-m_r}{1+m_sm_r}\Rightarrow 1=\frac{m_s-\left(-\frac{4}{5}\right)}{1+m_s\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)}\Rightarrow m_s+\frac{4}{5}=1+\frac{4}{5}m_s\Rightarrow \boxed{m_s=\frac{1}{9}}$$

luego la recta que pasa por B con esa pendiente es:

$$s:y=\frac{1}{9}x+4\Leftrightarrow \boxed{s:x-9y+36=0}\Rightarrow \overrightarrow{v_s}=(9,1)$$

c) La perpendicular al eje OX en A es s':x = 5 (su vector de dirección es $\overrightarrow{v_{s'}}=(0,1)$)y su intersección con la recta r nos da el punto $\boxed{P\left(5,\dfrac{41}{9}\right)}$

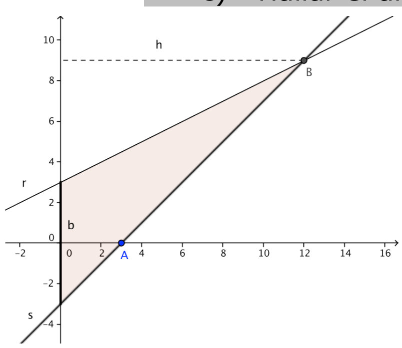
d) Hallamos el coseno del ángulo ß con los vectores directores:

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{v_s}\cdot\overrightarrow{v_{s'}}}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_{s'}}\right|}=\frac{9\cdot 0+1\cdot 1}{\sqrt{9^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{82}}=0{,}11043\Rightarrow \boxed{\beta\simeq 83^o40'\ \ y\ \ 96^o20'}$$

e) $$d(P,r)=\left|\frac{4\cdot 5+5\cdot\frac{41}{9}-20}{\sqrt{4^2+5^2}}\right|\simeq\boxed{3{,}56}$$

Valor	Nota
15	

2. Dada la recta *r*: *x* − 2*y* + 6 = 0:
   a) Hallar la ecuación de la recta *s* que pasa por el punto A(3, 0) y forma un ángulo de 45° con el eje OX
   b) Hallar el punto de corte B de *r* con la recta *s*.
   c) Hallar el área del triángulo limitado por las rectas *r, s* y el por el eje OY,



a) $s:y=m_sx+b$. Como la tan 45º=1 la pendiente es: $m_s=1$. Como la recta pasa por A, tenemos que : $0=m_s\cdot 3+b\Rightarrow b=-3m_s=-3$. Luego la ecuación de s es: $\boxed{s:y=x-3}$

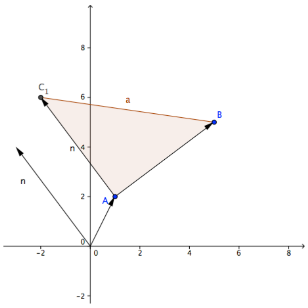
b) para hallar B tenemos que resolver el sistema formado por las dos ecuaciones: $\begin{cases}x-2y+6=0\\ y=x-3\end{cases}\Rightarrow\boxed{B=(12,9)}$

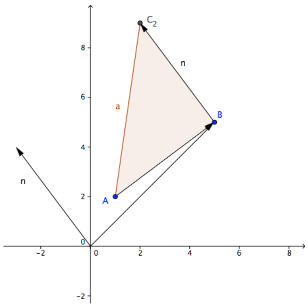
c) Para hallar el área tenemos que saber una base y su correspondiente altura en el triángulo. Escogemos como base el lado del triángulo que está en el eje OY y como altura la distancia de B al eje OY. Es evidente que: b = 6 y h = 12. Luego el área es: $Área=\dfrac{6\cdot 12}{2}=\boxed{36\ u^2}$

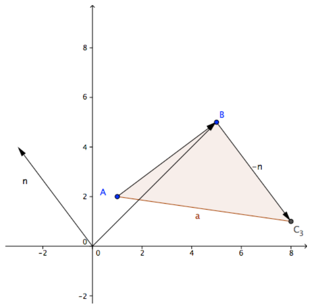
Valor	Nota
15	

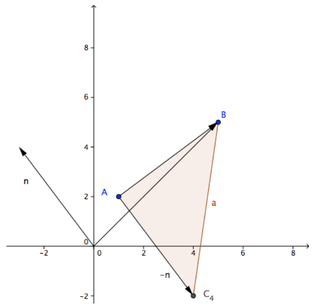
3. Los puntos A(1, 2) y B(5, 5) son los extremos de uno de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles. Hallar el otro vértice C.

El ángulo recto del triángulo isósceles debe están en uno de los dos extremos del cateto, es decir A o . El otro cateto medirá lo mismo que AB y será perpendicular a AB. Esto nos da cuatro posibilidades que dibujo a continuación:









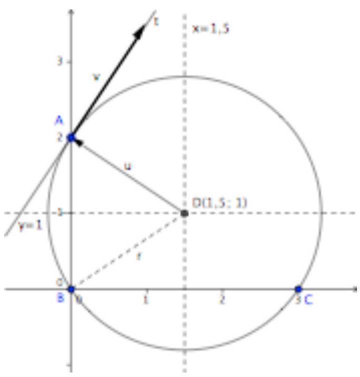
Calculo primero el vector que une los dos puntos: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (5,5)-(1,2) = (4,3)$. *El vector* $\vec{n} = (-3,4)$, *tiene el mismo módulo y es perpendicular a* $\vec{v}$. *Fijándose en la figura, tenemos que:*

$$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \vec{n} = (1,2)+(-3,4) = \boxed{(-2,6)}$$
$$\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OB} + \vec{n} = (5,5)+(-3,4) = \boxed{(2,9)}$$
$$\overrightarrow{OC_3} = \overrightarrow{OB} - \vec{n} = (5,5)-(-3,4) = \boxed{(8,1)}$$
$$\overrightarrow{OC_4} = \overrightarrow{OA} - \vec{n} = (1,2)-(-3,4) = \boxed{(4,-2)}$$

Valor	Nota
15	

4. a) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(0, 2), B(0, 0) y C(3, 0).

b) ¿Cuál es la ecuación de la tangente a esa circunferencia en A?



a) El centro de la circunferencia estará en el punto de corte de la mediatriz del segmento AB (que es y=1) con la mediatriz del segmento BC (que es x=1,5). Se trata por lo tanto de D(1,5; 1).
El radio es la distancia desde el centro a cualquiera de los puntos A, B o C.
Por ejemplo: $r = d(B,D) = \sqrt{1,5^2+1^1} = \sqrt{3,25}$
Por lo tanto, le ecuación de la circunferencia es:

$$\boxed{(x-1,5)^2+(y-1)^2 = 3,25}$$

b) La tangente en A es perpendicular al radio DA. Su vector de dirección es perpendicular al vector $\vec{u} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (1,5;1)-(0,2) = (1,5;-1)$. *Luego se trata de* $\vec{v} = (1;1,5)$.

La tangente en A es la recta que pasador A y tiene como vector direccional $\vec{v}$. *Es por tanto:*

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-2}{1,5} \Rightarrow 1,5x = y-2 \Rightarrow \boxed{t: 3x-2y+4=0}$$

Valor	Nota
15	

5. a) Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son los puntos F(−1, 3) y F'(9, 3) y cuyo eje real mide 6 unidades.

b) Dibújala aproximadamente.

c) ¿Cuál es la ecuación de sus asíntotas?

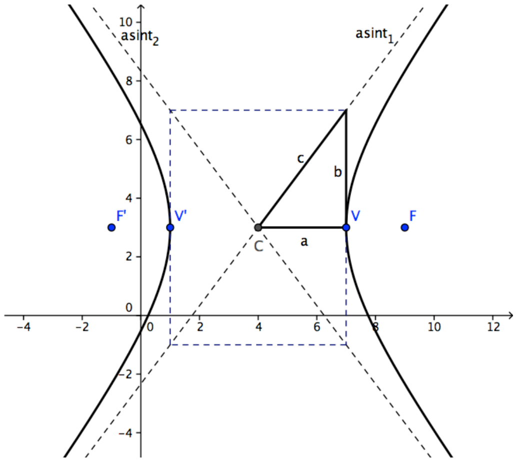
a) El centro C de la hipérbola es el punto medio del segmento que une ambos focos y la distancia entre es centro y uno de los focos es la semidistancia focal, c:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{x_F + x_{F'}}{2} = \frac{9+(-1)}{2} = 4 \\ y_C &= \frac{y_F + y_{F'}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{C(4,3)} \Rightarrow c = d(C,F) \Rightarrow \boxed{c=5}$$

Como $2a = 6 \Rightarrow \boxed{a=3}$ *y a partir de los valores de a y c podemos hallar el semieje imaginario, b:*

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow 3^2+b^2=5^2 \Rightarrow \boxed{b=4}$

Conocidos estos datos es posible escribir la ecuación de la hipérbola: $\boxed{\frac{(x-4)^2}{3^2} - \frac{(y-3)^2}{4^2} = 1}$



b) También tenemos suficiente para dibujar aproximadamente la gráfica de la hipérbola:

c) La pendiente de las dos asíntotas es: $m = \pm\frac{b}{a}$ y ambas pasan por el centro de la hipérbola, luego sus ecuaciones son:

$$asint_1 : \boxed{(y-3) = \frac{4}{3}(x-4)} \quad y \quad asint_2 : \boxed{(y-3) = -\frac{4}{3}(x-4)}$$

Valor	Nota
15	

6. a) ¿Cuál es la ecuación de la elipse cuya excentricidad es e = 0,6, su centro C(−1, 3) y uno de cuyos focos es F(5, 3)?
   b) Dibújala aproximadamente.
   c) Halla las coordenadas de los puntos en que corta a los ejes de coordenadas.

a) La distancia entre el centro de la elipse y uno de sus focos es la semidistancia focal, c: luego:

$$c = d(C,F) \Rightarrow \boxed{c = 6}$$

Como la excentricidad se define como $e = \frac{c}{a}$, tenemos que: $0{,}6 = \frac{6}{a} \Rightarrow a = \frac{6}{0{,}6} \Rightarrow \boxed{a = 10}$

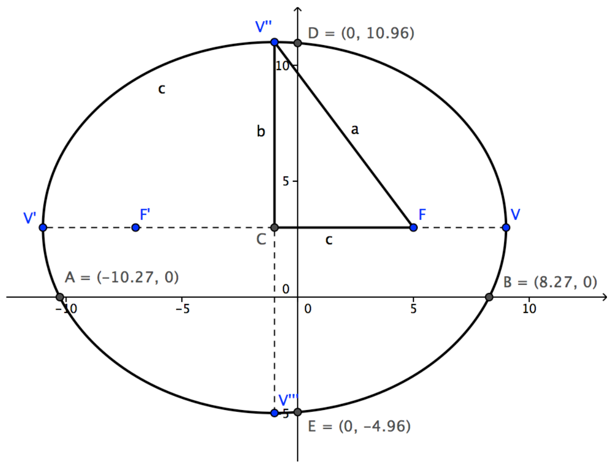
Para calcular el otro semieje basta emplear la ecuación que relaciona a los tres parámetros:

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow \boxed{b = 8}$$

Con lo que estamos en condiciones de escribir la ecuación de la elipse:

$$\boxed{\frac{(x+1)^2}{10^2} + \frac{(y-3)^2}{8^2} = 1}$$

b) La gráfica aproximada de la elipse será:



c) Para averiguar los puntos de corte con los ejes debemos resolver los sistemas formados por la ecuación de la elipse y el eje correspondiente:

Corte con eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{(x+1)^2}{10^2} + \frac{(y-3)^2}{8^2} = 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{10^2} + \frac{(-3)^2}{8^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{100} = 1 - \frac{9}{64} = \frac{55}{64} \Rightarrow (x+1)^2 = \frac{100}{64}\cdot 55 \Rightarrow$$

$$x + 1 = \pm\frac{10}{8}\sqrt{55} \Rightarrow x = -1 \pm \frac{10}{8}\sqrt{55} = \begin{cases} x_1 \simeq 8{,}27 \\ x_2 \simeq -10{,}27 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-10{,}27;0) \;\; y \;\; B(8{,}27;0)}$$

De forma similar, el corte con el eje OY es:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{(x+1)^2}{10^2} + \frac{(y-3)^2}{8^2} = 1 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(1)^2}{10^2} + \frac{(y-3)^2}{8^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y-3)^2}{64} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \Rightarrow (x+1)^2 = \frac{64}{100}\cdot 99 \Rightarrow$$

$$y - 3 = \pm\frac{8}{10}\sqrt{99} \Rightarrow x = 3 \pm \frac{8}{10}\sqrt{99} = \begin{cases} y_1 \simeq 10{,}96 \\ y_2 \simeq -4{,}96 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(0;10{,}96) \;\; y \;\; E(0;-4{,}96)}$$