Nota

Prueba 1.01 - 2º Bach C
Matrices y sistemas

Nombre:.. 06/10/10

Valor	Nota
25	

1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$:

a) ¿Qué relación tiene que haber entre *a* y *b* para que $A^2=2\cdot A$?

b) Calcular A^n, en función de *A,* si la matriz *A* cumple la propiedad anterior.

a) Se calcula el cuadrado de A: $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix}$

Para que $A^2=2\cdot A$ los elementos de las dos matrices deben ser iguales uno a uno: $\begin{cases} a^2=2a \Rightarrow a=2 \text{ ó } 0 \\ a+b=0 \\ b^2=2b \Rightarrow b=2 \text{ ó } 0 \end{cases}$ de estas soluciones las únicas combinaciones que cumplen la ecuación $a+b=2$ son $\boxed{a=2 \text{ y } b=0}$ o bien $\boxed{a=0 \text{ y } b=2}$

b) Se calculan varias potencias de A usando la propiedad que cumplen estas matrices, es decir, que $A^2=2\cdot A$:

$$\left.\begin{array}{l} A^3=A^2\cdot A=2A\cdot A=2A^2=2\cdot(2A)=2^2A \\ A^4=A^3\cdot A=2^2A\cdot A=2^2A^2=2^2\cdot(2A)=2^3A \\ A^5=A^4\cdot A=2^3A\cdot A=2^3A^2=2^3\cdot(2A)=2^4A \\ A^6=\cdots \end{array}\right\}$$ luego generalizando es evidente que $\boxed{A^n=2^{n-1}A}$

Valor	Nota
20	

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x+3y+2z=z \\ 2x-y+4z=x \\ 4x+12y-5z=y \end{cases}$

En primer lugar se agrupan los términos en cada ecuación y se obtiene un sistema que es homogéneo (y por tanto compatible):

$$\begin{cases} 2x+3y+2z-z=0 \\ 2x-x-y+4z=0 \\ 4x+12y-y-5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ x-y+4z=0 \\ 4x+11y-5z=0 \end{cases}$$

Se extrae la matriz ampliada del sistema y , por el método de Gauss, y luego se procede a convertirla en una matriz escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 11 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2 \\ F_1-2F_2 \\ F_3-4F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 15 & -21 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ F_3-3F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se trata de un sistema compatible e indeterminado. Falta resolverlo, lo que se hace en función de la última incógnita:

$$\begin{cases} x-y+4z=0 \\ 5y-7z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-4z \\ 5y=7z \end{cases}$$ si $z=t$, tenemos que: $y=\frac{7t}{5} \Rightarrow x=y-4t=\frac{7t}{5}-4t=-\frac{13t}{5}$

Luego la solución es: $\boxed{x=-\frac{13t}{5}, y=\frac{7t}{5}, z=t \quad \forall t\in\mathbb{R}}$

Valor	Nota
25	

3. Un vinatero posee tres tipos de vino cuyos precios son 3 €/l , 4 €/l y 7 €/l respectivamente. ¿Cómo debería mezclarlos para obtener un vino cuyo precio fuese de 5 €/l, teniendo en cuenta que debe emplear doble cantidad del vino que vale a 4 €/l que le cuesta 3 €/l?
(Ayuda: plantéate qué cantidad de cada vino habría que poner para obtener un litro de la mezcla deseada)

La siguiente tabla resume los datos del problema:

tipo	barato	medio	caro	mezcla
precio	3 €/l	4 €/l	7 €/l	5 €/l
cantidad	x	y	z	1 l

, donde además se sabe que 'y' es el doble que 'x'.

Esta información se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{r} \text{cantidades} \\ \text{precio de un litro de mezcla} \\ \text{doble cantidad de vino de 4€/l que del de 3€/l} \end{array} \begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+4y+7z=4 \\ y=2x \end{cases}.$$

Se extrae la matriz ampliada del sistema y se aplica el método de Gauss a la resolución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 3F_1-F_2 \\ 2F_1-F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 3F_2-F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+4z=2 \\ 10z=4 \end{cases}$$

de donde $z=\frac{4}{10}=0{,}4 \Rightarrow \boxed{\text{40\% de vino caro}}$; $y=2-4z=2-1{,}6=0{,}4 \Rightarrow \boxed{\text{40\% de vino medio}}$; y el resto, es decir, el $\boxed{\text{20\% de vino barato}}$.

Valor	Nota
25	

4. Dado el siguiente sistema de ecuaciones que depende el parámetro *a:*

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+(a-1)z=0 \\ x+(a-1)y+az=a \end{cases}$$

a) Discutir, según los valores del parámetro *a.*
b) Resolverlo cuando sea compatible y determinado.

a) Se extrae la matriz ampliada del sistema y, por el método de gauss, se trata de escalonarla:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & a-1 & a & a \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & a-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (a-1)F_2-F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & a-1 \end{array}\right)$$

Si $a^2-3a+2=0$ el rango de la matriz del sistema es 2 . Esto ocurre en las soluciones de la ecuación de segundo grado que son $a=1$ ó 2.. Estudiamos estos dos casos particulares. Las matrices ampliadas quedan:

Si $a=1$ $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ luego se trata de un sistema compatible e indeterminado.

Si $a=2$ $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ luego se trata de un sistema incompatible.

Si $a^2-3a+2\neq 0$, es decir, $a\neq 1$ ó 2 tanto la matriz del sistema como la ampliada tienen rango 3 y por tanto el sistema es compatible y determinado.

b) En los casos en que es compatible y determinado hay que resolver el sistema en función de *a*. Tendremos en cuenta que $a^2-3a+2=(a-1)(a-2)$ y dado que *a* no es ni 1 ni 2, podemos dividir por este término para despejar:

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+(a-1)z=0 \\ (a-1)(a-2)z=(a-1) \Rightarrow z=\dfrac{a-1}{(a-1)(a-2)} \Rightarrow \boxed{z=\dfrac{1}{a-2}} \end{cases}$$

y sustituyendo:

$$y=-(a-1)z=-\frac{a-1}{a-2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1-a}{a-2}}$$

$$x=1-z=1-\frac{1}{a-2}=\frac{(a-2)-1}{a-2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{a-3}{a-2}}$$