Determinantes (1)

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & a & a & a \\ a & 3 & a & a \\ a & a & 3 & a \\ a & a & a & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2x & x+y & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ 1 & \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \\ 1 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & n \end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+4 & 1 \\ a & a & a & a & 4 \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2a & c-a-b \end{vmatrix}$ n) $\begin{vmatrix} a+b & a & a & a & a \\ a & a+b & a & a & a \\ a & a & a+b & a & a \\ a & a & a & a+b & a \\ a & a & a & a & a+b \end{vmatrix}$

2. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -1$ y utilizando las propiedades de los determinantes, calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -a & b & c \\ -a-d & a+b & f+c \\ -g & h & i \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{pmatrix}$

3. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -1$ y utilizando las propiedades de los determinantes, calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{pmatrix}$

4. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 3 tales que: $|A| = 2$ y $|B| = 6$, encuentra el valor de: a) $|A \cdot B|$; b) $|2B|$; c) $|3A \cdot B|$; d) $|A^{-1} \cdot B|$

5. Encuentra el valor del determinante y la matriz inversa en los siguientes casos:

a) $M=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&1\\-2&2&-1\end{pmatrix}$ b) $N=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ c) $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&6\end{pmatrix}$

d) $U=\begin{pmatrix}-2&0&4&1\\4&1&1&-2\\1&3&3&1\\0&4&1&-1\end{pmatrix}$ e) $V=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$ f) $W=\begin{pmatrix}3&-1&-1&1\\-1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\1&-1&0&3\end{pmatrix}$

6. Dadas las siguientes matrices, calcula los valores del parámetro m para los que tienen inversa y en esos casos calcularlas:

a) $\begin{pmatrix}m&5&2\\-8&9&-4\\3&m&1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2&1&-2\\3&-4&0\\m&m&1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&m&-6\\m&1&2\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}2&1&-3\\2&m&-8\\m&6&4\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}m&3&4&5\\4&7&m&-5\\2&4m&3&-9\\-5&0&7&0\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}0&0&m&4m\\3&2&-2&8\\-1&2&-6&m\\4&-6&m&0\end{pmatrix}$

7. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix}-2&x&0\\-x&2&1\\-3&0&1\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&x&3\\4&1&x\end{vmatrix}=0$ c) $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&x&1\\1&1&x^2\end{vmatrix}=0$

d) $\begin{vmatrix}6&2x&-2x\\4&-2&6\\2x+10&2&2\end{vmatrix}=0$ e) $\begin{vmatrix}3&x&-x\\2&-1&3\\x+10&1&1\end{vmatrix}=0$ f) $\begin{vmatrix}x&x+1&x+2\\x+3&x+4&x+5\\x+6&x+7&x+8\end{vmatrix}=0$

8. Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro *m:*

a) $\begin{pmatrix}1&m^2-1&m\\1&2m^2-2&2m-1\\1&0&m^2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}m&m&1&1\\1&m&m&1\\1&1&m&m\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}m&-1&-1&0\\-m&m&-1&1\\1&-1&m&1\\1&-1&0&m\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}2&0&m&2\\-1&0&-1&3\\5&m+4&-4&-3\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}m&0&0\\1&m+1&1\\1&0&m-1\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}5&m+4&-4&-3\\2&0&m&2\\-1&0&-1&3\end{pmatrix}$

9. Comprueba que las siguientes matrices tienen el mismo determinante:

$$A=\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\1&1-a&1&1\\1&1&1+b&1\\1&1&1&1-b\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1+a&1\\1&1-a\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1+b&1\\1&1-b\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

10. Sea A una matriz cuadrada de orden 4, cuyas filas son F_1, F_2, F_3 y F_4 y cuyo determinante vale 2. Sea la matriz $B=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$. Calcula de forma razonada: a) El determinante de la matriz $A\cdot B$. b) El determinante de la matriz 3ª. c) El determinante de la matriz cuyas filas son: $2F_1+F_2, -F_2, 3F_4, F_3+F_1$.