| Nota |
|---|
| |

# Prueba 2.01 - 2º Bach C
## Geometría

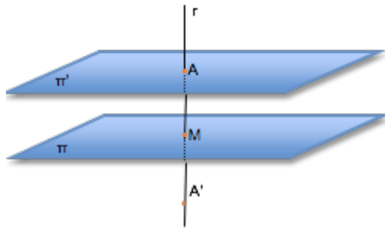
Nombre:......................................................... **11/01/11**

| Valor | Nota |
|---|---|
| 25 | |

1. Dado el plano $\pi : 2x - 3y + z - 11 = 0$, determinar:
   a) La ecuación de un plano $\pi'$, paralelo a $\pi$ que contenga al punto A (1, 1, -2).
   b) Las coordenadas del punto A' simétrico de A respecto del plano $\pi$.

a) La ecuación del plano paralelo $\pi$'es de la forma: $2x-3y+z+k=0$. Como debe pasar por A, sus coordenadas deben cumplir la ecuación, es decir:

$2\cdot 1-3\cdot 1+(-2)+k=0 \Rightarrow k=3$, luego la ecuación es. $\boxed{\pi' : 2x-3y+z+3=0}$.




b) El punto de corte M de la recta $r$ perpendicular a $\pi$ y que pasa por A con el plano $\pi$, es punto medio del segmento AA'. Hallamos la ecuación de la recta $r$ sabiendo que su vector de dirección es el vector de dirección del plano $\pi$: $n=(2,-3,1)$: $r:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=1-3\lambda \\ z=-2+\lambda \end{cases}$.

El punto M es la intersección del plano $\pi$ y la recta $r$. Sustituyo en la ecuación del plano las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$2\cdot(1+2\lambda)-3\cdot(1-3\lambda)+(-2+\lambda)-11=0 \Rightarrow 2+4\lambda-3+9\lambda-2+\lambda-11=0 \Rightarrow 14\lambda-14=0 \Rightarrow \lambda=1.$$

Por lo tanto las coordenadas del punto M son; M (3, -2, -1). Como las coordenadas de M son la semisuma de las de A y las de A' ($a$, $b$, $c$), tenemos que:

$\frac{1+a}{2}=3 \Rightarrow a=5;\ \frac{1+b}{2}=-2 \Rightarrow b=-5;\ \frac{-2+c}{2}=-1 \Rightarrow c=0$, luego $\boxed{A'(5,-5,0)}$.

| Valor | Nota |
|---|---|
| 25 | |

2. Dada la recta $r : \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$
   a) Hallar su vector de dirección.
   b) La ecuación de la recta $r'$, paralela a $r$ que pasa por P (1, 0, −2).
   c) Ecuación del plano $\pi$ perpendicular a $r$ que pasa por P.

a) Hallamos dos puntos distintos de la recta:

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ 2y-z=2 \end{cases} \Rightarrow y=1;\ z=0 \Rightarrow A(0,1,0)$$

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} 2+y+z=1 \\ 1+2y-z=2 \end{cases} \Rightarrow y=0;\ z=-1 \Rightarrow B(1,0,-1)$$

El vector de dirección es el vector $v_r=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0B}-\overrightarrow{OA}=(1,0,-1)-(0,1,0) \Rightarrow \boxed{v_r=(1,-1.-1)}$.

b) La recta $r'$ tiene el mismo vector de dirección que $r$ y pasa por P. Su ecuación continua es: $\boxed{r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-1}}$.

c) El vector normal del plano $\pi$ es el vector de dirección de la recta $r$, y sabemos que pasa por P, luego la ecuación del plano es:

$$n\cdot\overrightarrow{PX}=0 \Rightarrow v_r\cdot(x-1,y-0,z+2)=0 \Rightarrow (1,-1,-1)(x-1,y,z+2)=0 \Rightarrow 1\cdot(x-1)-1\cdot y-1\cdot(z+2)=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x-y-z-3=0}$$

| Valor | Nota |
|---|---|
| 25 | |

3. Dados las rectas siguientes:

$$r_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0} \quad y \quad r_2: \begin{cases} kx + y = 2k+1 \\ z = 3 \end{cases}$$

a) Determinar su posición relativa según los valores del parámetro *k.*

b) Hallar a qué distancia están una de la otra en el caso de ser paralelas.

a) Para estudiar la posición relativa expresamos las ecuaciones como intersecciones de planos y estudiamos el rango del sistema formado por ellas:

$$r_1: \begin{cases} \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} \\ \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{z}{0} \end{cases} \Rightarrow r_1: \begin{cases} x-1 = -y+1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow r_1: \begin{cases} x+y=2 \\ z=0 \end{cases}$$

$$r_2: \begin{cases} kx+y=2k+1 \\ z=3 \end{cases}$$

. La matriz del sistema es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & 0 & 2k+1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$. Usamos el método de Gaus:

$$\begin{array}{c} F_3 - kF_1 \\ F_2 \\ F_4 - F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } k \neq 1 \Rightarrow rango(M) = 3 \neq rango(MA) = 4 \Rightarrow \text{las rectas se cruzan} \\ \text{si } k = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow rango(M) = 2 \neq rango(MA) = 3 \Rightarrow \text{las rectas son paralelas} \end{cases}$$

b) Tenemos que hallar un punto en cada recta que estén en una perpendicular común a ambas. Para ello hallamos un plano perpendicular a las dos rectas y los puntos de corte del plano con las rectas. El vector normal al plano será el de dirección de ambas rectas que es: $n = (-1,1,0)$. Elegimos que pase por P (1,1, 0) con lo que ya sabemos donde corta a la recta $r_1$. Ese plano es:

$$\pi: -1\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z + k = 0 \quad \text{y pasa por P, luego} \quad -1+1+k=0 \Rightarrow k=0 \Rightarrow \boxed{\pi: -x+y=0}$$

Hallamos el punto de corte del plano $\pi$ con la recta $r_2$: $\left.\begin{array}{l} r_2: \begin{cases} x+y=3 \\ z=3 \end{cases} \\ \pi: -x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=3 \Rightarrow y=\dfrac{3}{2} \Rightarrow x=\dfrac{3}{2} \Rightarrow Q=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2},3\right)$.

La distancia entre las dos paralelas es ka distancia entre los puntos P y Q: $d(r_1,r_2) = d(P,Q) = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}-1\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}-1\right)^2 + (3-0)^2} = \boxed{\sqrt{\dfrac{19}{2}}}$

| Valor | Nota |
|---|---|
| 25 | |

4. a) Hallar la ecuación del plano $\pi$ que contiene al punto A (1, 1, −2) y a la recta $r: \begin{cases} x+y-2z=2 \\ x-y+z=0 \end{cases}$.

b) Hallar la ecuación de la recta *r'* que pasa por A y B (2, 1, 0).

c) ¿Qué ángulo forman la recta *r'* y el plano $\pi$.

a) Hallamos dos puntos de la recta *r* que junto al punto A determinan el plano $\pi$:

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} y-2z=2 \\ -y+z=0 \end{cases} \Rightarrow y=-2;\ z=-2 \Rightarrow P(0,-2,-2);\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} 1+y-2z=2 \\ 1-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow y=1;\ z=0 \Rightarrow Q(1,1,0)$$

El plano está determinado por A y los vectores $\overrightarrow{AP} = (0,-2,-2)-(1,1,-2) = (-1,-3,0)$; $\overrightarrow{AQ} = (1,1,0)-(1,1,-2) = (0,0,2)$.

Luego la ecuación del plano es: $\pi: \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y-1 & -3 & 0 \\ z+2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6\cdot(x-1) + 2\cdot(y-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -3x+y+2=0}$

b) El vector de dirección de *r'* es el vector $\overrightarrow{AB} = (2,1,0)-(1,1,-2) = (1,0,2)$. La recta *r'* pasa por A y B (podemos usar el que queramos), luego su ecuación continua es: $\boxed{r': \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+2}{2}}$.

c) El ángulo $\alpha$ entre una recta y un plano es el complementario del ángulo formado por las direcciones de la recta y la normal al plano. El vector normal al plano $\pi$ es: $n = (-3,1,0)$. Calculamos el coseno del ángulo entre ambas direcciones:

$$\cos(\widehat{v,n}) = \frac{v\cdot n}{|v|\cdot|n|} = \frac{1\cdot(-3)+0\cdot 1+2\cdot 0}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1^2+0^2}} = \frac{-3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{-3}{5\sqrt{2}} \Rightarrow (\widehat{v,n}) = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{5\sqrt{2}}\right) = 115^\circ 6'15'' \Rightarrow \alpha = 115^\circ 6'15'' - 90 = \boxed{25^\circ 6'15''}$$