Nota

Prueba 2.03 – 2º Bach C

Geometría

Nombre:... **11/02/11**

Elige una de las dos opciones y contesta a todas sus preguntas.
Tiempo disponible 1 h. 30 min.

OPCIÓN A

Valor	Nota
25	

1. a) Se consideran la recta r que pasa por los puntos A(1, 2, a) y B(2, 3, 0), y la recta s que pasa por el punto C (2, 4, 0) y cuyo vector de dirección es $\vec{v}\,(2,-1,2)$. Estudia sus posiciones relativas según los valores del parámetro a.

   b) En el caso de cortarse, averigua el punto P de intersección y el área del triángulo APC.

a) El vector de posición de la recta AB es el vector $\overrightarrow{AB}=(1,1,-a)$. A la vista de este vector y del vector $\vec{v}$, ya podemos decir que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes pues los vectores respectivos no pueden ser dependiente uno del otro.

Hallamos un vector que una dos puntos, cada uno de ellos en una recta, por ejemplo el vector $\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$. Si el producto mixto de los dos vectores de dirección este vector es distinto de 0, entonces las rectas se cruzarán; en caso contrario, se cortarán:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2a-2 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } -2a-2=0 \Rightarrow a=-1 \text{ entonces } r \text{ y } s \text{ se cortan} \\ \text{Si } -2a-2\neq 0 \Rightarrow a\neq -1 \text{ entonces } r \text{ y } s \text{ se cruzan} \end{cases}$$

b) Hallamos las ecuaciones de las rectas r y s: $r:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-0}{1}$ y $s:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-0}{2}$. Resolvemos el sistema formado por estas ecuaciones para hallar el punto P. Obtendremos que $P=\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{11}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

Para hallar el área del triángulo averiguamos los vectores: $\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3}\right)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,2,1)$. El área del triángulo será:

$$Área=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 5/3 & 5/3 & 5/3 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{5}{3}i+\frac{5}{3}k\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\boxed{\frac{5\sqrt{2}}{6}}$$

Valor	Nota
25	

2. a) Halla la ecuación de la recta r que pasa por el punto A(1, 1, −1), es paralela al plano $\pi: x-y+z=1$ y corta al eje Z.

   b) Halla la ecuación general del plano que contiene a la recta r del apartado anterior y a la recta s que pasa por A y es perpendicular al plano π.

a) El vector de dirección de r estará determinado por A y un punto B del eje Z, es decir B (0, 0, b). Es decir: $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,b+1)$. Como r es paralela al plano π, el vector de dirección de r es ortogonal al vector normal del plano π: $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=(-1,-1,b+1)\cdot(1,-1,1)=0 \Rightarrow -1+1+(b+1)=0 \Rightarrow b=-1$.

La recta que nos piden es la recta que pasa por A y B(0, 0, −1): $r:\dfrac{x-1}{0-1}=\dfrac{y-1}{0-1}=\dfrac{z+1}{-1+1} \Rightarrow \boxed{r:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{0}}$.

b) La recta s tiene como vector de dirección, al vector normal del plano π. El plano que nos piden debe contener a las dos rectas r y s así como al punto común a ambas que es A. Su ecuación será: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{-x+y+2z+2=0}$

Valor	Nota
25	

3. Los puntos P(1, −1, 1) y Q(4, −4, 4) son dos vértices opuestos de un cuadrado que está contenido en un plano σ que es perpendicular al plano $\pi: x+y=0$.
   a) Halla la ecuación de la recta r en la que están los otros dos vértices.
   b) Determina un vector unitario $\vec{u}$ que tenga la dirección de la recta r.
   c) Determina los otros dos vértices del cuadrado.

a) El plano σ contiene al vector $\overrightarrow{PQ}=(3,-3,3)$; también debe contener al vector normal al plano π que es $\vec{n}=(1,1,0)$ y evidentemente a los puntos P y Q.

Su ecuación es: $\sigma: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \sigma: -x+y+2z=0$.

La otra diagonal será la mediatriz del segmento PQ, que estará contenida en el plano σ y también en el plano perpendicular a la recta PQ. Este segundo plano tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{PQ}$ y pasa por el punto medio del segmento PQ, que es: $M=\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$. Su ecuación es:

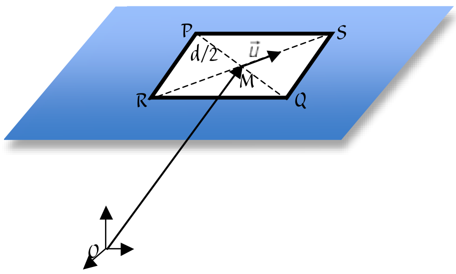
$$\sigma: 3\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)-3\cdot\left(y+\frac{5}{2}\right)+3\cdot\left(z-\frac{5}{2}\right)=0 \Rightarrow x-y+z-\frac{15}{2}=0 \Rightarrow \boxed{\sigma: 2x-2y+2z-15=0}.$$

La recta que contiene a los otros dos vértices será la intersección de estos dos planos: $\boxed{r:\begin{cases}-x+y+2z=0\\ 2x-2y+2z=15\end{cases}}$

b) Calculamos el vector de dirección de r que es: $\vec{v}_r=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}=6\vec{i}+6\vec{j}$. Para hallar un vector unitario de esta misma dirección basta que multipliquemos por el inverso del módulo: $\vec{u}=\frac{1}{|\vec{v}_r|}\cdot\vec{v}_r=\frac{1}{\sqrt{6^2+6^2}}\cdot(6,6,0)=\frac{1}{6\sqrt{2}}(6,6,0) \Rightarrow \boxed{\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)}$

c) La diagonal del cuadrado mide: $d=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(4-1)^2+(-4+1)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{3}$.

Observando la figura se ve de que forma podemos hallar los otros dos vértices:



$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{OM}+\frac{d}{2}\cdot\vec{u}=\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)=\left(\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},-\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\frac{5}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{OM}-\frac{d}{2}\cdot\vec{u}=\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)=\left(\frac{5}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},-\frac{5}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\frac{5}{2}\right)$$

Valor	Nota
25	

4. a) Dado el plano $\pi: x+2y-2z=5$ determina un punto en cada uno de los ejes de coordenadas (A en el eje X, B en el eje Y, y C en el eje Z) que estén situados a 2 unidades de distancia del plano π.
   b) ¿Cuál es el volumen del tetraedro OABC?
   c) ¿Cuánto mide la altura de ese tetraedro correspondiente al vértice O?

a) A (a, 0, 0), B (0, b, 0) y C (0, 0, c) son puntos del eje X, Y y Z que está a distancia 2 del plano π:

$$d(A,\pi)=\frac{|a+2\cdot 0-2\cdot 0-5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=2 \Rightarrow \frac{|a-5|}{3}=2 \Rightarrow |a-5|=6 \Rightarrow \begin{cases}a=11\\ a=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A(11,0,0)\\ A(-1,0,0)\end{cases}$$

De manera análoga obtenemos que $B\left(0,\frac{11}{2},0\right)$ ó $B\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$ y $C\left(0,0,-\frac{11}{2}\right)$ ó $C\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$. Para cada punto existen dos soluciones, lo que daría hasta 8 combinaciones posibles. Tomaremos tan sólo una de ellas: $A(11,0,0)$, $B\left(0,\frac{11}{2},0\right)$ y $C\left(0,0,-\frac{11}{2}\right)$

b) $Vol(OABC)=\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11/2 & 0 \\ 0 & 0 & -11/2 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{11}{2}\right)^3=\boxed{\frac{1331}{48}}$.

c) La altura es la distancia del origen de coordenadas al plano σ que pasa por los puntos A, B y C que hemos escogido.

$$\sigma:\begin{vmatrix} x-11 & y-0 & z-0 \\ 11 & -11/2 & 0 \\ 11 & 0 & 11/2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\sigma: x+2y-2z-11=0} \Rightarrow h=d(O,\sigma)=\frac{|\,0+2\cdot 0-2\cdot 0-11\,|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\boxed{\frac{11}{3}}$$

OPCIÓN B

Valor	Nota
25	

1. Dadas las rectas: $r:\begin{cases} x-2y=-1 \\ y-z=1 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} 2x-y-3z=6 \\ x-y-z=1 \end{cases}$

   a) ¿Cuál es su posición relativa?

   b) Halla la distancia menor entre ellas y una recta que sea perpendicular a las dos rectas *r* y *s* (si es que existe).

a) Calculamos sus vectores de dirección: $\vec{v}_r=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{v}_s=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$. Como son dos vectores opuestos, las rectas o son paralelas o coincidentes. El punto P (–1, 0, –1) esta en la recta *r*, pero no en la recta *s*, luego las rectas son paralelas.

b) Como son paralelas la distancia mínima es la distancia de un punto de una de ellas a la otra. Hallamos un punto Q en *s:* Q (5, 4, 0):

$$d(s,r)=d(P,r)=\frac{|\,\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}_r\,|}{|\,\vec{v}_r\,|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{|3\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2+(-2)^2}}{\sqrt{6}}=\boxed{\sqrt{\frac{29}{6}}}$$

Valor	Nota
25	

2. Se considera la recta $r:\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-y+2z=-1 \end{cases}$

   a) Halla el valor del parámetro *m* para que el plano $\pi: 5x+my+2z+1=0$ sea paralelo a la recta *r.*

   b) ¿A qué distancia está el plano que has hallado en el apartado anterior de la recta *r*.

   c) ¿Hay algún valor del parámetro *m* para el que el plano π sea perpendicular a la recta *r*. Explica tu respuesta.

a) Hallamos el vector de dirección de *r*: $\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}$. Para que la recta y el plano sean paralelos, el vector normal del plano debe ser ortogonal al vector de dirección de la recta: $\vec{v}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (-2,-4,-1)\cdot(5,m,2)=0 \Rightarrow -10-4m-2=0 \Rightarrow \boxed{m=-3}$.

b) La distancia será la que haya desde cualquier punto de la recta, por ejemplo P (0, –1, –1) al plano:

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|5\cdot 0-3\cdot(-1)+2\cdot(-1)+1|}{\sqrt{5^2+(-3)^2+2^2}}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{38}}}$$

c) Para que la recta sea perpendicular al plano, vector de dirección de *r* y el normal del plano *n* deben ser "paralelos", es decir, uno dependiente del otro.

Luego debemos encontrar λ tal que: $\lambda\cdot\vec{v}=\vec{n} \Rightarrow \lambda\cdot(-2,-4,-1)=(5,m,2) \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda=5 \\ -4\lambda=m \\ -\lambda=2 \end{cases}$, que obviamente es incompatible. Luego no es posible que la recta y el plano sean perpendiculares.

Valor	Nota
25	

3. a) Halla el punto simétrico de P(2, 1, 1) respecto de la recta r, que pasa por el punto A(0, 2, 3) y es paralela a $s:\begin{cases}x+2y=0\\ z=0\end{cases}$

b) Halla un punto B que esté en la recta r a distancia 7 del punto P.

c) Halla el área del triángulo PAB.

: a) El vector de dirección de s es: $\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2i-j$. Luego la recta r es: $r:\frac{x-0}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{0}$. Hallamos el plano perpendicular a r que pasa por P; su vector normal es el de la recta r: $\pi:2\cdot(x-2)-1\cdot(y-1)+0\cdot(z-1)=0 \Rightarrow \pi:2x-y-3=0$.

El punto de intersección M de la recta r y el plano π es la solución del sistema: $\begin{cases}-x=2\cdot(y-2)\\ 0\cdot(y-2)=-1\cdot(z-3)\\ 2x-y-3=0\end{cases} \Rightarrow M=(2,1,3)$.

El punto M es el punto medio del segmento que une P con su simétrico P' (a, b, c), luego:

$$\frac{2+a}{2}=2 \Rightarrow a=2;\ \frac{1+b}{2}=1 \Rightarrow b=1;\ \frac{1+c}{2}=3 \Rightarrow c=5 \Rightarrow \boxed{P'=(2,1,5)}$$

b) La ecuación de la recta r es: $r:\begin{cases}x=0+2\cdot\lambda\\ y=2+(-1)\cdot\lambda\\ z=3+0\cdot\lambda\end{cases} \Rightarrow B=(2\lambda,2-\lambda,3)$. Como el punto debe estar a distancia 7 de P:

$$d(P,B)=\sqrt{(2-2\lambda)^2+[1-(2-\lambda)]^2+(1-3)^2}=7 \Rightarrow \sqrt{4+4\lambda^2-8\lambda+1+\lambda^2-2\lambda+4}=7 \Rightarrow 5\lambda^2-10\lambda+9=49 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=4\\ \lambda=-2\end{cases}$$

Luego hay dos posibles posiciones de B: $B=(8,-2,3)$ y $B=(-4,4,3)$.

c) Usamos la primera de las dos soluciones: $Área(\triangle PAB)=\frac{|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}|}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left|8i+16j\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{8^2+16^2}=\boxed{4\sqrt{5}}$.

Valor	Nota
25	

4. a) Halla la ecuación de la recta r que se obtiene cuando hacemos la proyección ortogonal del eje Z sobre el plano $\pi: x+2y-z=6$.

a) Halla la ecuación de la recta simétrica al eje Z respecto del plano π.

a) Tomamos dos puntos cualquiera del eje Z, por ejemplo el origen O (0, 0, 0) y otro cualquiera P(0, 0, 6). Los proyectamos sobre el plano π y la recta que pasa por ellos es la proyección que buscamos. Para proyectarlos sobre el plano π, debemos trazar las perpendiculares por esos puntos y ver donde cortan al plano π. El vector de dirección de las perpendiculares es le normal al plano: (1, 2, –1).

Las perpendiculares son: $r:\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{-1}$ y $s:\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-6}{-1}$. Para saber las proyecciones hallamos las intersecciones de estas rectas con el plano resolviendo los sistemas: $\begin{cases}r:\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{-1}\\ \pi:x+2y-z=6\end{cases} \Rightarrow O'=(1,2,-1)$ y $\begin{cases}s:\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-6}{-1}\\ \pi:x+2y-z=6\end{cases} \Rightarrow P'=(2,4,4)$.

La recta que nos piden es la recta O'P': $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{4-2}=\frac{z+1}{4+1} \Rightarrow \boxed{\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{5}}$

b) Hallamos los simétricos O" y P" de O y P respecto del plano π. Los puntos O' y P' son los puntos medios de los segmentos OO" y PP" respectivamente:

$$O"=(a,b,c);\ \frac{0+a}{2}=1 \Rightarrow a=2;\ \frac{0+b}{2}=2 \Rightarrow b=4;\ \frac{0+c}{2}=-1 \Rightarrow c=-2 \Rightarrow O"=(2,4,-2)$$

$$P"=(a',b',c');\ \frac{0+a'}{2}=2 \Rightarrow a=4;\ \frac{0+b'}{2}=4 \Rightarrow b=8;\ \frac{0+c'}{2}=4 \Rightarrow c=8 \Rightarrow P"=(4,8,8)$$

La recta que nos piden es la recta O"P": $\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-4}{8-4}=\frac{z+2}{8+2} \Rightarrow \boxed{\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z+2}{10}}$