Infinitos e infinitésimos

Infinitos

Decimos que una función *f(x)* es un **infinito** en *a*, si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Órdenes de infinitud

Entre los infinitos logarítmico, potencial, exponencial y potencial exponencial existe la siguiente relación:

$$\left(\log_q x\right)^p \ (q > 1;\, p > 0) \ll x^b \ (b > 0) \ll c^x \ (c > 1) \ll x^{dx} \ (d > 1)$$

Esta relación sigue siendo válida si en vez de la variable x, consideramos una función *u(x)* que sea un infinito en *a.* Es decir:

$$\left(\log_q u(x)\right)^p \ (q > 1;\, p > 0) \ll \left[u(x)\right]^b \ (b > 0) \ll c^{u(x)} \ (c > 1) \ll \left[u(x)\right]^{d \cdot u(x)} \ (d > 1)$$

Calcular los siguientes límites haciendo uso de las órdenes de infinitud:

1) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x^5) - 2x}{x + e^x}$ 2) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(e^{5x}\right)}{5x + \ln x}$ 3) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{\ln(3x + 7)}$

4) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{3x}}{4x^2}$ 5) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{e^x}$ 6) $\lim_{x \to \infty} e^{-x} \cdot x^8$

7) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln(x)}$ 8) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^{15} + 2x^7}{2^x}$ 9) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1 + x^6)}{x^2}$

10) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^5}{e^{-x}}$ 11) $\lim_{x \to \infty} \left(e^{-x} \cdot \ln x^3\right)$ 12) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^{200}}$

13) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^{1{,}002}}{\ln(x)}$ 14) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x^5}{x + 1}$ 15) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2^x}$

16) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^{1{,}05}}{1{,}05^x}$ 17) $\lim_{x \to \infty} \left(x^4 - e^x\right)$ 18) $\lim_{x \to \infty} \left(\ln x - x\right)$

19) $\lim_{x \to \infty} \left(x^3 + \ln x\right)$ 20) $\lim_{x \to \infty} \left(4^x - e^{2x}\right)$ 21) $\lim_{x \to \infty} \left(\log_2 x - \ln x\right)$

22) $\lim_{x \to \infty} \left(4^x - 2^x\right)$ 23) $\lim_{x \to -\infty} \left(4^x - 2^x\right)$ 24) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 3^x$

Infinitésimos

Decimos que una función *f(x)* es un **infinitésimo** en *a*, si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Propiedades:

- La suma de dos infinitésimos es un infinitésimo.
- El producto de un infinitésimo por una constante, o por una función acotada, es un infinitésimo.

Infinitésimos equivalentes

Dos infinitésimos son equivalentes si el límite de su cociente es 1:

Si $u(x)$ y $v(x)$ son infinitésimos en a, $u(x) \approx v(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = 1$

Principio de sustitución

En la expresión de un límite se sustituye un factor o un divisor infinitésimo por otro equivalente el límite de la expresión no cambia. Si la sustitución se hace cuando están sumando o restando, entonces es fácil equivocarse.

Tabla de infinitésimos equivalentes

Cuando $x \to 0$	Cuando $u(x) \approx 0$ en a
$\operatorname{sen} x \approx x$	$\operatorname{sen} u(x) \approx u(x)$
$\tan x \approx x$	$\tan u(x) \approx u(x)$
$\operatorname{arcsen}(x) \approx x$	$\operatorname{arcsen} u(x) \approx u(x)$
$\arctan x \approx x$	$\arctan u(x) \approx u(x)$
$1-\cos x \approx \frac{x^2}{2}$	$1-\cos u(x) \approx \frac{u^2(x)}{2}$
$e^x - 1 \approx x$	$e^{u(x)} - 1 \approx u(x)$
$\ln(1+x) \approx x$	$\ln(1+u(x)) \approx u(x)$

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{3x}$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{5x}{\tan 3x}$

3) $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x^2}{3x^3}$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\operatorname{sen} x)}{x^2}$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

8) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x}$

9) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+3x\sqrt{x}\right)}{x^2}$

10) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\tan x)}{\operatorname{sen} x}$

11) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{4x}$

12) $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{x^2-1}$

13) $\lim_{x\to -1} \frac{e^{x^2-1}-1}{x+1}$

14) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}-1}{\operatorname{arcsen} x}$

15) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x \cdot \operatorname{sen} x^2}{x^3}$

16) $\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{sen} 2x}{5x}$

17) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \tan x}{1-\cos x}$

18) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{2-2x}$

19) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{1-e^x}$

20) $\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{\ln(\cos x)}$

21) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{1-e^{2x}}$

22) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos 2x}$

23) $\lim_{x\to 0} \frac{5x \cdot \operatorname{sen} 2x}{4x^2}$

24) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x^2}$

25) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x^2}{\ln(1-x^2)}$

26) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(\tan x)}$

27) $\lim_{x\to \infty} x^{3/2} \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

28) $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot \operatorname{sen}(x-1)}{1-\cos(x-1)}$

29) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 3x}{x \operatorname{sen}^3 2x}$

30) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan\frac{x}{3} \cdot \operatorname{sen}\frac{x}{2}}{1-\cos\frac{x}{4}}$

31) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

32) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

33) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}\right)$

34) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

35) $\lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{\operatorname{arcsen}(x-1)}$

36) $\lim_{x\to \infty} \left(x^2+x^3\right) \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$

37) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{x}$

38) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{1-e^x}$

39) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \tan x}{1-\cos x}$