Nota

Prueba 3.01 - 2º Bach C
Límites

Nombre:... 25/02/11

Valor	Nota
10	

1. ¿Cuál es dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x+2}$ b) $f(x)=1-e^{x}$

c) $f(x)=\ln(2x-1)$ d) $f(x)=1+\operatorname{sen} x$

a) El dominio lo forma los valores que hacen el radicando positivo o cero, es decir $\operatorname{Dom} f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\right\}$; $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^{+}$;

b) La función exponencial está definida en todo los reales y toma sólo valores positivos, luego: $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}$ y $\operatorname{Im} f=(-\infty,1)$.

c) El dominio lo forman los valores en los que $2x-1$ es positivo: $\operatorname{Dom} f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq 1/2\right\}$; $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$

d) La función seno está definida en todos los reales y sus valores están entre -1 y $+1$, el recorrido será: $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}$ y $\operatorname{Im} f=[0,2]$.

Calcular los siguientes límites:

Valor	Nota
10	

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-1}\cdot\left(1-\dfrac{x+1}{2}\right)$

No hay indeterminación, luego $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-1}\cdot\left(1-\dfrac{x+1}{2}\right)=0\cdot\left(1-\dfrac{0+1}{2}\right)=0\cdot\dfrac{1}{2}=\boxed{0}$

Valor	Nota
10	

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+1)(x+2)}-x\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+1)(x+2)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x+2}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x+2}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2-x^2}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+3x+2}{x^2}}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=\frac{3}{\sqrt{1}+1}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

Valor	Nota
10	

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1-2)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(x^2+3-4\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(x^2-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x+1)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{1^2+3}+2}{(1+1)\cdot\left(\sqrt{1+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Valor	Nota
10	

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x+2}+\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{x^2}{2x+1}}$

Es una indeterminación del tipo 1^{∞} . Por tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+2}+\frac{1}{3}\right)^{\frac{x^2}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}\cdot\left(\frac{2x-1}{3x+2}+\frac{1}{3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}\cdot\left(\frac{2x-1}{3x+2}-\frac{2}{3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}\cdot\frac{3(2x-1)-2(3x+2)}{3(3x+2)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}\cdot\frac{-7}{9x+6}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7x^2}{18x^2+21x+6}}=\boxed{e^{-7/18}}$$

Valor	Nota
10	

6. a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{4^x}$ b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2 x}{x^{4/3}}$

a) Como $e^2 \simeq 7{,}39 > 4 \Rightarrow \left(e^2\right)^x = e^{2x} \gg 4^x \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{4^x} = \boxed{+\infty}$

b) Como $\log_a x \ll x^b$ si $a,b>1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2 x}{x^{4/3}} = \boxed{0}$

Valor	Nota
10	

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{(1-3x)^4 \cdot (2x^2-1)^2}{(3x^3+2x)^2 \cdot (2x-3)^2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1-3x)^4 \cdot (2x^2-1)^2}{(3x^3+2x)^2 \cdot (2x-3)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(3^4x^4 - 3\cdot 3^3 x^3 \cdot 1 + \ldots)\cdot(2^2x^4 - 2\cdot 2x^2 + 1)}{(3^2x^6 + 2\cdot 3x^3\cdot 2x + 2^2x^2)\cdot(2^2x^2 - 2\cdot 2x\cdot 3 + 3^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(3^4x^4\right)\cdot\left(2^2x^4\right) + (\text{términos de grado inferior})}{\left(3^2x^6\right)\cdot\left(2^2x^2\right) + (\text{términos de grado inferior})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{324x^8 + (\text{términos de grado inferior})}{36x^8 + (\text{términos de grado inferior})} = \frac{324}{36} = \boxed{9}$$

Valor	Nota
10	

8. a) $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^2-4}$ b) $\lim_{x\to 1} \frac{\text{arcsen}(e^{x-1}-1)}{\text{sen}(\ln x)}$

a) Como $x-2 \approx 0$ cuando $x=2$ y $x-1 = 1+(x-2)$ tenemos que $\ln(x-1) = \ln\left[1+(x-2)\right] \approx x-2$, así que podemos sustituir en el límite y queda:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

b) Como $e^{x-1}-1 \approx 0$ cuando $x=1$ y $\ln x \approx 0$ cuando $x=1$, podemos sustituir y queda: $\lim_{x\to 1} \frac{\text{arcsen}(e^{x-1}-1)}{\text{sen}(\ln x)} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{\ln x} = (*)$

Como $x-1 \approx 0$ entonces $e^{x-1}-1 \approx x-1$ y también $\ln x = \ln\left[1+(x-1)\right] \approx x-1$, y volviendo a sustituir en (*) se obtiene: $(*) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x-1} = \boxed{1}$

Valor	Nota
10	

9. $\lim_{x\to -1} \left(\frac{2x^2}{x+1} - \frac{x-3}{x^2-1}\right)$

$$\lim_{x\to -1} \left(\frac{2x^2}{x+1} - \frac{x-3}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to -1} \left(\frac{2x^2}{x+1} - \frac{x-3}{(x-1)(x+1)}\right) = \lim_{x\to -1} \frac{2x^2(x-1)-(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{2x^3-2x^2-x+3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(2x^2-4x+3)}{(x-1)\cancel{(x+1)}} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2x^2-4x+3}{x-1} = \frac{2(-1)^2-4(-1)+3}{-1-1} = \frac{9}{-2} = \boxed{\frac{-9}{2}}$$

Valor	Nota
10	

10. $\lim_{x\to 0} \left(1+\tan x\right)^{\frac{1}{\cos x - 1}}$

Es una indeterminación del tipo 1^∞. Por tanto:

$$\lim_{x\to 0} \left(1+\tan x\right)^{\frac{1}{\cos x-1}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x-1}\cdot(1+\tan x-1)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\cos x-1}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\left(-x^2/2\right)}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{-2}{x}} = \begin{cases} e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{x}} = e^{-\infty} = 0 \\ e^{\lim_{x\to 0^-} \frac{-2}{x}} = e^{\infty} = +\infty \end{cases}$$