Nota

Prueba 3.02 - 2º Bach C
Derivación

Nombre:.. **1/04/11**

Calcular los siguientes límites:

Valor	Nota
10	

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-3}{x-2}-\dfrac{x-5}{x^2-x-2}\right)$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-3}{x-2}-\frac{x-5}{x^2-x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-3}{x-2}-\frac{x-5}{(x-2)(x+1)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x+1)-(x-5)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-3-x+5}{(x-2)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}=\frac{2-1}{2+1}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

Valor	Nota
10	

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln(1+3x)\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}2x}}$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\ln(1+3x)\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen}2x}(1+\ln(1+3x)-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\operatorname{sen}2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}}=e^{3/2}=\boxed{e\sqrt{e}}\ ;$$

Donde hemos tenido en cuenta que: $\ln(1+3x)\approx 3x$ cuando $x\to 0$ y $\operatorname{sen}2x\approx 2x$ cuando $x\to 0$.

Valor	Nota
30	

3. Dada la función siguiente:

$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{si } x<-1\\ 2-x^2 & \text{si } -1\le x<2\\ \dfrac{1}{x-3}+b & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

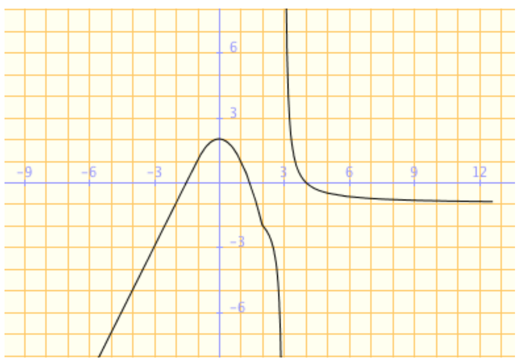
a) Determinar el valor de *b* para que sea continua en x=2.
b) Dibujar de forma aproximada la gráfica de esta función.
c) Para el valor de *b* que has hallado en el apartado a), estudia la derivabilidad de esta función.

a) Para que la función sea continua, los límites laterales deben coincidir con el valor de la función en $x=2$, que es $f(2)=\dfrac{1}{2-3}+b=-1+b$.

Calculamos estos límites laterales :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2-x^2)=2-2^2=-2\\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x-3}+b\right)=\dfrac{1}{2-3}+b=-1+b\end{array}\right\}\Rightarrow -2=-1+b\Rightarrow \boxed{b=-1}$$

b) La gráfica está compuesta de tres trozos, el primero corresponde a una función afín, el segundo a una función cuadrática y el tercero a una de proporcionalidad inversa que tiene su asíntota vertical en $x=3$.



c) La función tiene una discontinuidad en $x=3$, luego en ella la función no es derivable. Los únicos valores para los que puede haber problemas son $x=-1$ y $x=2$, donde se unen los trozos ya que en los otros puntos del dominio está definida a través de funciones que son derivables. Estudiaremos la derivabilidad en esos puntos:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2(-1+h)+3-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-1+2h}{h}=-2$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\left(2-(-1+h)^2\right)-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2-(1+h^2-2h)-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0^+}(h-2)=-2$$

Dado que las dos derivadas laterales en x = −1 existen y son iguales, la función es derivable en ese punto. Estudiamos ahora el otro:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\left(2-(2+h)^2\right)-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2-(4+h^2+4h)+2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2-4h}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-h-4)=-4$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{(2+h)-3}-1\right)-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{h-1}+1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1+(h-1)}{h(h-1)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(h-1)}=\frac{1}{0-1}=-1$$

Como las dos derivadas laterales son distintas, la función no es derivable en $x = 2$.

Valor	Nota
10	

4. a) Demuestra que la curva $y = x - \operatorname{sen} x$ y la recta $y = 2x + 1$ tienen al menos un punto de intersección.

b) Comprueba que la función $f(x) = x \cdot \tan(x)$ cambia de signo en los intervalos [1, 2] y [2, 4]. ¿Se puede afirmar que tiene se anula en un punto de cada intervalo?

a) Consideramos la función $f(x)=(2x+1)-(x-\operatorname{sen}x)=x+1-\operatorname{sen}x$. Es equivalente demostrar que las dos funciones se cortan a demostrar que la función $y=f(x)$ tiene un cero. Es lo que vamos a hacer aplicando el teorema de Bolzano:

Es una función continua en todos los números reales ya que es la diferencia de dos funciones continuas. Buscamos dos puntos en los que esta función cambie de signo. Por ejemplo: $f(-\pi)=-\pi+1-\operatorname{sen}(-\pi)=-\pi+1-0<0$ y $f(0)=0+1-\operatorname{sen}(0)=0+1-0>0$

Luego por el teorema de Bolzano, la función $y=f(x)$ tiene un "cero" en el intervalo $(-\pi, 0)$.

b) La función $f(x)=x\cdot\tan x$, no es continua en el intervalo [1, 2] ya que en el punto $x = \pi/2$, la tangente tiene una discontinuidad. No podemos aplicar el teorema de Bolzano aunque haya cambio de signo. Sin embargo, la función si que es continua en el intervalo [2,4], luego si hubiese cambio de signo si podríamos afirmar, de acuerdo con el teorema de Bolzano, que se anula en el interior de ese intervalo. En efecto:

$$f(2)=2\cdot\tan(2)\simeq-4{,}37<0 \quad y \quad f(4)=4\cdot\tan(4)\simeq 4{,}63>0$$

Valor	Nota
30	

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{2}{\sqrt{(1-x^3)^5}}$; $y=2\cdot(1-x^3)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow y'=2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(1-x^3)^{-\frac{5}{2}-1}\cdot\left(-3x^2\right)=15x^2\cdot(1-x^3)^{-\frac{7}{2}}=\dfrac{15x^2}{\sqrt{(1-x^3)^7}}=\boxed{\dfrac{15x^2}{(1-x^3)^3\cdot\sqrt{(1-x^3)}}}$

b) $y=\left[e^{x\cdot\ln x+1}\right]^5$; $y=e^{5(x\ln x-1)} \Rightarrow y'=e^{5(x\ln x-1)}\cdot 5\cdot(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-0)=\boxed{5\cdot(\ln x+1)\cdot e^{5(x\ln x-1)}}$

c) $y=\ln(2x^3+4)^2$; $y=2\cdot\ln(2x^3+4) \Rightarrow y'=2\cdot\dfrac{1}{2x^3+4}\cdot 2\cdot 3x^2=\dfrac{12x^2}{2x^3+4}=\boxed{\dfrac{6x^2}{x^3+2}}$

d) $y=\arctan\dfrac{1}{x-1} \Rightarrow y'=\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x-1}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{-1}{(x-1)^2}\right)=-\dfrac{1}{\frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2}}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}=-\dfrac{\cancel{(x-1)^2}}{x^2-2x+1+1}\cdot\dfrac{1}{\cancel{(x-1)^2}}=\boxed{\dfrac{-1}{x^2-2x+2}}$

e) $y=\dfrac{\operatorname{sen}^3 2x}{\cos^4 4x} \Rightarrow y'=\dfrac{3\cdot\operatorname{sen}^2 2x\cdot\cos 2x\cdot 2\cdot\cos^4 4x-\operatorname{sen}^3 2x\cdot 4\cdot\cos^3 4x\cdot(-\operatorname{sen}4x)\cdot 4}{\left(\cos^4 4x\right)^2}=$

$$=\frac{6\operatorname{sen}^2 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos^4 4x+16\operatorname{sen}^3 2x\cdot\cos^3 4x\cdot\operatorname{sen}4x}{\cos^8 4x}=$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}^2 2x\cdot\cos^3 4x\cdot(3\cos 2x\cdot\cos 4x+8\operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{sen}4x)}{\cos^8 4x}=\boxed{\frac{2\operatorname{sen}^2 2x\cdot(3\cos 2x\cdot\cos 4x+8\operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{sen}4x)}{\cos^5 4x}}$$

f) $y=(1+2e^{-x})^{1-\ln 3x}$ Usaremos derivación logarítmica

$$\ln y=\ln\left[(1+2e^{-x})^{1-\ln 3x}\right]=(1-\ln 3x)\cdot\ln(1+2e^{-x}) \Rightarrow \frac{y'}{y}=\left(-\frac{1}{3x}\cdot 3\right)\cdot\ln(1+2e^{-x})+(1-\ln 3x)\cdot\frac{1}{1+2e^{-x}}\cdot(-2e^{-x})=-\left(\frac{\ln(1+2e^{-x})}{x}+\frac{-2e^{-x}(1-\ln 3x)}{1+2e^{-x}}\right)$$

$$\Rightarrow y'=-\left(\frac{\ln(1+2e^{-x})}{x}+\frac{-2e^{-x}(1-\ln 3x)}{1+2e^{-x}}\right)\cdot y=\boxed{-\left(\frac{\ln(1+2e^{-x})}{x}+\frac{-2e^{-x}(1-\ln 3x)}{1+2e^{-x}}\right)\cdot(1+2e^{-x})^{1-\ln 3x}}$$

Valor	Nota
10	

6. Calcula la ecuación de las rectas tangente y normal en el punto de ordenada $y=\pi/4$ a la curva definida por la siguiente ecuación $x\cdot y-\tan y=1$.

En primer lugar, calcularemos la abcisa del punto sustituyendo en la ecuación:

$$x\cdot\frac{\pi}{4}-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow \frac{\pi x}{4}-1=1 \Rightarrow \frac{\pi x}{4}=2 \Rightarrow x=\frac{8}{\pi} \Rightarrow P=\left(\frac{8}{\pi},\frac{\pi}{4}\right)$$

Ahora derivamos la función, usando derivación implícita: $1\cdot y+x\cdot y'-(1+\tan^2 y)\cdot y'=0 \Rightarrow y+(x-1-\tan^2 y)\cdot y'=0 \Rightarrow \boxed{y'=\frac{-y}{x-1-\tan^2 y}}$

La pendiente de la tangente en P es la derivada particularizada en ese punto:

$$m_{\text{tangente}}=y'(P)=\frac{-\frac{\pi}{4}}{\frac{8}{\pi}-1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{-\frac{\pi}{4}}{\frac{8}{\pi}-1-1}=\frac{-\frac{\pi}{4}}{\frac{8-2\pi}{\pi}}=\frac{-\pi^2}{4\cdot(8-2\pi)}=\boxed{\frac{\pi^2}{8\cdot(\pi-4)}}$$

y por tanto la recta tangente es. $\boxed{y-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{8(\pi-4)}\cdot\left(x-\frac{8}{\pi}\right)}$.

Por otra parte, la pendiente de la normal es: $m_{\text{normal}}=\frac{-8(\pi-4)}{\pi^2}=\boxed{\frac{8(4-\pi)}{\pi^2}}$ y su ecuación: $\boxed{y-\frac{\pi}{4}=\frac{8(4-\pi)}{\pi^2}\cdot\left(x-\frac{8}{\pi}\right)}$