Nota

Prueba 3.04 - 2º Bach C
Análisis

Nombre:.. 17/05/10

Elige una de las dos opciones y contesta a todas sus preguntas.
Tiempo disponible 1 h. 30 min.

OPCIÓN A

Valor	Nota
25	

1. a) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\operatorname{sen}x}{x\cdot\operatorname{sen}x} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

b) Calcula y simplifica las derivadas de las siguientes funciones:

$$y=\arctan\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad y=\frac{\left(x^2+3\right)^4}{e^{3x+5}}$$

a) En el primer límite hemos aplicado dos veces la regla de L'Hôpital —en los paso marcados por (*)— pues aparece dos veces la indeterminación 0/0::

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\operatorname{sen}x}{x\cdot\operatorname{sen}x}\underset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{\operatorname{sen}x+x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)\cdot\cos x}{(1+x)(\operatorname{sen}x+x\cdot\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)\cdot\cos x}{(1+x)\cdot\operatorname{sen}x+(x+x^2)\cdot\cos x}=$$

$$\underset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{0-\cos x+(1+x)\cdot\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x+(1+x)\cdot\cos x+(1+2x)\cdot\cos x-(x+x^2)\cdot\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos 0+(1+0)\cdot\operatorname{sen}0}{\operatorname{sen}0+(1+0)\cdot\cos 0+(1+2\cdot 0)\cdot\cos 0-(0+0^2)\cdot\operatorname{sen}0}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

En el segundo caso, aunque se podría hacer usando la regla de L'Hopital, lo hacemos multiplicando y dividiendo por el conjugado del numerador:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)-2^2}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\cdot\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

b) En el primer caso aplicamos la regla de la cadena:

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\cdot\frac{-1}{2x\cdot\sqrt{x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{2x\cdot\sqrt{x}}=\frac{\cancel{x}}{1+x}\cdot\frac{-1}{2\cancel{x}\cdot\sqrt{x}}=\boxed{\frac{-1}{(1-x)\cdot\sqrt{x}}}$$

En el segundo caso emplearemos derivación logarítmica: $\ln y=4\cdot\ln(x^2+3)-(3x+5)\cdot\ln e=4\cdot\ln(x^2+3)-(3x+5)$; Ahora derivamos:

$$\frac{y'}{y}=4\cdot\frac{2x}{x^2+3}-3=\frac{8x-3\cdot(x^2+3)}{x^2+3}=\frac{-3x^2+8x-9}{x^2+3}\;\Rightarrow\; y'=\frac{-3x^2+8x-9}{x^2+3}\cdot y=\frac{-3x^2+8x-9}{\cancel{x^2+3}}\cdot\frac{(x^2+3)^{\cancel{4}\,3}}{e^{3x+5}}=\boxed{\frac{(-3x^2+8x-9)\cdot(x^2+3)^3}{e^{3x+5}}}$$

Valor	Nota
25	

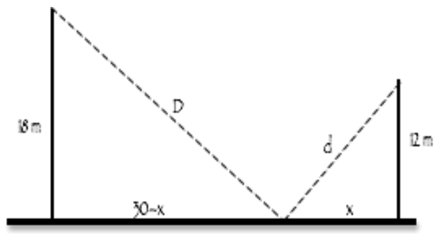
2. a) Explica razonadamente si es cierta o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:
   - La función $f(x)=2x+\cos x$ no puede tener extremos relativos.
   - La función $f(x)=x^2+\cos x$ es siempre convexa.

b) Dos postes de telefonía miden 12 m y 18 m respectivamente y están a 30 m uno del otro. Desde lo alto de cada poste se tiende un cable que va hasta un mismo punto situado entre ambos postes.¿A qué distancia de cada poste debe estar el punto de anclaje para que la longitud total del cable sea mínima?

a) En la primera cuestión la función tiene como derivada $f'(x)=2-\operatorname{sen}x$, que dedo que la función seno toma como máximo el valor 1, es siempre positiva y por tanto la función es siempre creciente, por tanto carece de extremos relativos y absolutos. Es por tanto VERDADERA..

En la segunda cuestión, la derivada segunda de la función es: $f'(x)=2x-\operatorname{sen}x \;\Rightarrow\; f''(x)=2-\cos x$, que como en el caso anterior es siempre positiva ya que cosen o de x no puede pasar de 1. Por tanto la función es siempre cóncava y la afirmación es FALSA.

b) Usamos el teorema de Pitágoras para hallar la longitud total del cable::



$$L = D + d = \sqrt{18^2+(30-x)^2} + \sqrt{12^2+x^2} = \sqrt{x^2-60x+1224} + \sqrt{144+x^2}$$

Debemos buscar los mínimos de esta función, para lo que derivamos, igualamos a 0 y resolvemos la ecuación:

$$L' = \frac{2x-60}{2\sqrt{x^2-60x+1224}} + \frac{2x}{2\sqrt{144+x^2}} = 0 \;\Rightarrow$$

$(x-30)\cdot\sqrt{144+x^2} = -x\cdot\sqrt{x^2-60x+1224} = 0 \;\Rightarrow$ elevamos al cuadrado: $(x-30)^2\cdot(144+x^2) = (-x)^2\cdot(x^2-60x+1224) \;\Rightarrow$

$$x^4-60x^3+1044x^2-8640x+129600 = x^4-60x^3+1224x^2 \;\Rightarrow\; 180x^2+8640x-129600=0 \;\Rightarrow\; x^2+48x-720=0$$

Cuyas soluciones son $x=-60$ y $x=12$. De las dos, evidentemente , la negativa debemos rechazarla. Para asegurarnos de que la otra solución corresponde a un mínimo, estudiamos el signo de L' en el entorno de 12. Por ejemplo he calculado: $L'(11{,}75) = -0{,}0123\ldots$ y $L'(12{,}75) = 0{,}0122\ldots$ con lo que observamos el cambio de signo de la derivada de signo negativo a positivo, lo que nos indica que en $x=12$ la función L cambia de decreciente a creciente, es decir es un mínimo. En conclusión, hay que anclar el cable en un punto a 18 m del poste alto y 12 m del poste más corto.

Valor	Nota
25	

3. a) La recta $y = x+3$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-k}$. Averiguar el valor de k.

   b) Para el valor de k que has encontrado en el párrafo anterior estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

a) Calculamos la pendiente de la asíntota oblicua : $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x^2}{x-k} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-kx} = 1$, lo que ya sabíamos.

Pasamos a calcular la ordenada en el origen de la asíntota oblicua: $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f\,8x)-m\cdot x\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-k}-x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x(x-k)}{x-k} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{kx}{x-k} = k$

Cómo sabemos que b es 3, deducimos que $\boxed{k=3}$.

b) Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento debemos estudiar el signo de la derivada. Primero la calculamos:

$f'(x) = \dfrac{2x(x-3)-x^2\cdot 1}{(x-3)^2} = \dfrac{2x^2-6x-x^2}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2-6x}{(x-3)^2} = \dfrac{x(x-6)}{(x-3)^2}$; su signo sólo depende del numerador pues el denominador es siempre positivo excepto cuando $x = 3$. El signo del numerador que es un polinomio de 2º grado, es negativo entre las dos raíces 0 y 6, y positivo en el resto de valores.

En consecuencia la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty,0)$, decreciente en $(0,6)$ y creciente en $(6,+\infty)$.

Valor	Nota
25	

4. a) Estudiar los posibles máximos y mínimos de la función $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,dt$

   b) Encontrar el área comprendida entre las curvas $f(x) = x^3 - x^2$ y $g(x) = x^2 + x - 2$.

a) La función integral $F(x)$ está definida en el intervalos $[1,+\infty)$ y de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo integral $F'(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Esta función es positiva en todo su dominio luego su valor mínimo lo alcanza cuando $x = 1$. Así que M(1,0) es un mínimo absoluto de la función y no tiene máximos.

b) Averiguamos los puntos de corte de las curvas resolviendo la ecuación: $f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; x^3-x^2 = x^2+x-2 \;\Rightarrow\; x^3-2x^2-x+2=0$.

Por Ruffini: $\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \;\Rightarrow\; \boxed{x=1}$ es una solución y resolviendo la ecuación $x^2-x-2=0$ obtenemos el resto de las soluciones que son $\boxed{x=-1}$ y $\boxed{x=2}$. El área será:

$$A=\left|\int_{-1}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|+\left|\int_{1}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|=\left|\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2-x+2)dx\right|+\left|\int_{1}^{2}(x^3-2x^2-x+2)dx\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{1}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{1}^{2}\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{1^4}{4}-\frac{2\cdot 1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{2\cdot(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}+2(-1)\right)\right|+\left|\left(\frac{2^4}{4}-\frac{2\cdot 2^3}{3}-\frac{2^2}{2}+2\cdot 2\right)-\left(\frac{1^4}{4}-\frac{2\cdot 1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+2\right|+\left|\frac{16}{4}-\frac{16}{3}-\frac{4}{2}+4-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-2\right|=\left|\frac{8}{3}\right|+\left|-\frac{5}{12}\right|=\boxed{\frac{37}{12}}$$

OPCIÓN B

Valor	Nota
25	

1. Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-1 & \text{si } x\le 1 \\ 2bx-2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

a) Encuentra dos parejas de valores de *a* y de *b* para los que la función sea continua. Dibuja la función en los dos casos

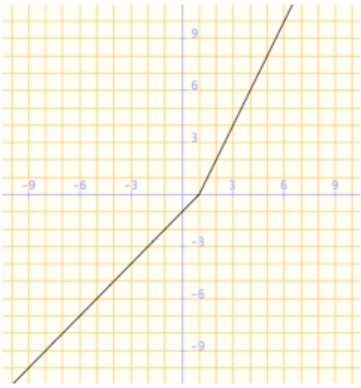
b) ¿Para qué valores de *a* y de *b* la función es continua y derivable? ¿Cuál sería la gráfica de la función en este caso?

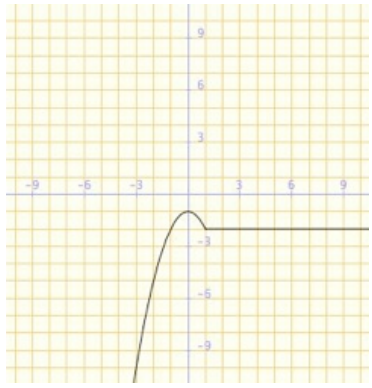
a) Para que la función sea continua es preciso que los límites laterales en 1:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax^2+bx-1)=a+b-1;\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2bx-2)=2b-2 \;\Rightarrow\; a+b-1=2b-2 \;\Rightarrow\; \boxed{a=b-1}$$

Dibujamos a continuación dos casos particulares; He elegido las parejas, $a=0;\ b=1$ y $a=-1;\ b=0$:

$$a=0;\ b=1 \;\Rightarrow\; f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\le 1 \\ x-2 & \text{si } x>1 \end{cases}\qquad a=-1;\ b=0 \;\Rightarrow\; f(x)=\begin{cases} -x^2-1 & \text{si } x\le 1 \\ -2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$



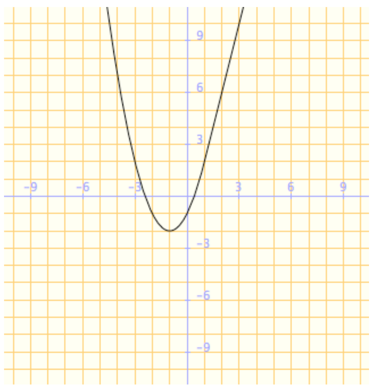


b) Para que la función sea derivable es preciso que sean iguales la derivada por la izquierda y por la derecha sean iguales:

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}(2ax+b)=2a+b;\quad f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+} 2b=2b \;\Rightarrow\; 2a+b=2b \;\Rightarrow\; \boxed{b=2a}$$

Para que sea continua y derivable se precisa que se cumplan ambas condiciones. Resolviendo el sistema formado por ambas condiciones :

$$\begin{cases} a=b-1 \\ 2a=b \end{cases} \;\Rightarrow\; a=2a-1 \;\Rightarrow\; \boxed{a=1} \;\Rightarrow\; \boxed{b=2}$$ luego la función continua y derivable es: $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x\le 1 \\ 4x-2 & \text{si } x>1 \end{cases}$, cuya gráfica es:



Valor	Nota
25	

2. a) $I(0,\ 1)$ es un punto de inflexión de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ en el que la tangente a la curva tiene pendiente 1. Halla los valores de a y de b.

b) Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = e^x \cdot \left(\operatorname{sen} x + \cos x\right)$. Encontrar los máximos y mínimos en el intervalo $[0, 2\pi]$.

a) La gráfica de la función $f(x)$ pasa por el punto I independientemente de los valores de a y de b. Las otras dos condiciones conducen a un sistema del que obtendremos los valores de a y de b:

La tangente en $I(0,1)$ tiene pendiente 1 $\Rightarrow f'(0)=1$; como $f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow 3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b=1 \Rightarrow \boxed{b=1}$

$I(0,1)$ es un punto de inflexión $\Rightarrow f''(0)=0$; como $f''(x)=6x+2a \Rightarrow 6\cdot 0+2a=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$

Luego la función que buscamos es: $\boxed{f(x)=x^3+x+1}$.

b) Para estudiar el crecimiento de esta función empezamos por calcular la derivada: $f'(x)=e^x\cdot(\operatorname{sen}x+\cos x)+e^x\cdot(\cos x-\operatorname{sen}x)=2e^x\cdot\cos x$.

El signo de esta derivada depende del signo de la función cos*x*. Por lo tanto será creciente en los intervalos de la forma:

$\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, para cualquier valor de $k\in\mathbb{Z}$ y será decreciente en el resto de los valores . En el intervalo $[0,2\pi]$ hay dos cambios de tendencia., que corresponden a los valores 0 y 1 del parámetro k. El primero es cuando $\boxed{x=\pi/2}$ en que se pasa de creciente a decreciente y por tanto hay un máximo relativo y en $\boxed{x=-3\pi/2}$, donde el paso es de decreciente a creciente y por tanto hay un mínimo relativo.

Valor	Nota
25	

3. Estudiar las asíntotas y los extremos de la función $f(x) = \dfrac{e^x}{1+2x}$

Existe una asíntota vertical que corresponde la valor que anula su denominador: $1+2x=0 \Rightarrow \boxed{x=-1/2}$.

Calculamos los límites en el infinito para saber si hay asíntotas horizontales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+2x}=+\infty \text{ ya que el numerador crece mucho más rápido que el denominador}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+2x}=0\cdot 0=0\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{y=0} \text{ es asíntota horizontal en la parte izquierda de la gráfica}$$

Para averiguar si hay una asíntota oblicua en la parte derecha de la gráfica, calculamos: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{e^x}{1+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+2x^2}=+\infty$, luego no hay asíntota oblicua.

Para estudiar los extremos calculamos la derivada, la igualamos a 0 y resolvemos la ecuación:

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot(1+2x)-e^x\cdot 2}{(1+2x)^2}=\frac{e^x\cdot(2x-1)}{(1+2x)^2}=0 \Rightarrow e^x\cdot(2x-1)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} e^x=0 \text{ lo que no es posible}\\ 2x-1=0 \Rightarrow x=1/2\end{array}\right.$$

. Como el signo de $f'(x)$ tan sólo depende de $2x$ 1 que cambia de signo negativo a positivo en $x=1/2$. Luego $\boxed{x=1/2}$ es un mínimo de la función.

Valor	Nota
25	

4. Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{3+5x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int x^2 \cdot e^{'2x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-2}}\,dx$ con el cambio de variable $t=\sqrt{x-2}$.

a) Con un pequeño arreglo queda una integral inmediata:

$$\int \frac{4x}{\sqrt{3+5x^2}}dx=\frac{4\cdot 2}{10}\int \frac{10x}{2\sqrt{3+5x^2}}dx=\boxed{\frac{4}{5}\sqrt{3+5x^2}+C}$$

b) En este caso será preciso aplicar dos veces la integración por partes:

$$\int x^2\cdot e^{2x}\,dx=x^2\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\int\frac{e^{2x}}{2}\cdot 2x\,dx=\frac{x^2e^x}{2}-\int x\cdot e^{2x}\,dx=\frac{x^2\cdot e^x}{2}-\left(x\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\int\frac{e^{2x}}{2}dx\right)=\frac{x^2\cdot e^x}{2}-\frac{x\cdot e^x}{2}+\frac{e^x}{4}+C=\boxed{\frac{e^x}{4}\cdot(2x^2-2x+1)+C}$$

$u=x^2 \Rightarrow du=2x\,dx$ $\qquad$ $u=x \Rightarrow du=dx$

$dv=e^{2x}dx \Rightarrow v=\dfrac{e^{2x}}{2}$ $\qquad$ $dv=e^{2x}dx \Rightarrow v=\dfrac{e^{2x}}{2}$

c) Antes de aplicar el cambio de variable debemos calcular *dt* y escribir la variable *x* en función de la variable *t*:

$$t=\sqrt{x-2}\ \Rightarrow\begin{cases} dt=\dfrac{dx}{2\sqrt{x-2}} \Rightarrow 2dt=\dfrac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ t^2=x-2 \Rightarrow x=t^2+2\end{cases}$$ y ahora hacemos la sustitución:

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x-2}}=\int\frac{1}{x-1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x-2}}=\int\frac{1}{(t^2+2)-1}\cdot 2dt=\int\frac{dt}{t^2+1}=\arctan t+C=\boxed{\arctan\sqrt{x-2}+C}$$